数理解析研究所講究録
467巻 1982年 56-63

$S^3\times[0,1)$ のコンパクト化についての注意

東大・理　久我 健一

(Ken'ichi Kuga)

このノートでは、Π^4 は、次の(i), (ii)を満たす位相的/可微分、コンパクト4次元多様体を表わす。

(i) $\partial\Pi^4 = S_0^3 \sqcup \Sigma_1^3$ (2成分) で、$S_0^3 \approx S^3$

(ii) 位相同型 $S^3\times[0,1) \underset{\approx}{\xrightarrow{\varphi}} \Pi^4 \setminus \Sigma_1^3$ が存在する。

かかる Π^4 が、$S^3\times[0,1]$ に限るかどうかは、以下で判る通り難しい問題である。ここでは、上の(ii)の位相同型 φ が一定の性質(定義1)を満たすようにとれるか、という問題が、他の2, 3の問題と、密接に関連していることを注意したい。

<u>定義1</u>　Π^4 が、リプシッツ(or 部分的リプシッツ)とは、上の(ii)の φ として、次を満足するものが、とれるときをいう。: Π^4 の距離 δ (resp. δ と、さらに、ある $z\in\Sigma_1^3$ の Π^4 における近傍 $\mathcal{O}$) があって、(x, y) が、$x\neq y, \in S^3\times[0,1)$ (resp. $x\neq y, \in \varphi^{-1}(\mathcal{O})$) を動くときの

$$\sup(\delta(\varphi(x), \varphi(y))/d(x, y)) < \infty$$

となること。ただしここに、d は、$S^3 \times [0.1)$ を 単位3-球面 $\times [0.1) \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ と思った時の、$\mathbb{R}^5$ の標準的距離 $\left(\sum_{i=1}^{5}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$ から導かれるものとする。//

<u>注意</u> $\Pi^4 = S^3 \times [0.1]$ は、明らかに、この意味で、リプシッツである。

<u>定理1</u> 次は同値

(a) $\mathbb{R}^4$ に、局所平坦に、位相的埋蔵可能な、任意の位相的 Π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ は部分的リプシッツ

(b) 全ての位相的 Π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ は、$\Pi^4 \approx S^3 \times [0.1]$

(c) 4次元アニュラス予想は真 //

<u>定理2</u> 次において (a) $\Rightarrow$ (b) $\rightleftarrows$ (c)

(a) 全ての可微分 Π^4 はリプシッツ

(b) 全ての可微分 Π^4 に対し $\Sigma_1^3 \approx S^3$

(c) 3次元ポアンカレー予想は真 //

上への写像 $f : S^n \to S^n$ が、pseudo-isotopy $\{f_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, ($0 \leq t < 1$ に対して $f_t : S^n \approx S^n$) があって $f = f_1$ となるとき、(以下、ABH と書く)

<u>補題1</u> $M_f \approx S^n \times [0,1]$, ここに M_f は写像柱〃

この逆として <u>問題</u> M(4) : $M_f \approx S^4 \times [0,1] \Rightarrow f$ は ABH か? が考えられる. これについては

<u>定理3</u> M(4) $\Rightarrow$ 全ての CE 写像 $f: S^4 \to S^4$ は ABH〃

<u>注意</u> $n \neq 4$ については全ての CE 写像 $S^n \to S^n$ は ABH である ([Ar], [Si]). $n=4$ について知られていることは [Fr] の Theorem 9.1 .

<u>証明</u>

<u>補題1</u>の ☺ : 下において h は well-defined bijective

$$\begin{tikzcd} & S^n \times [0,1] \arrow[dl, "\text{quotient map}"'] \arrow[dr, "\text{pseudo-isotopy } f_t \times t"] & \\ M_f \arrow[rr, "h"] & & S^n \times [0,1] \end{tikzcd}$$

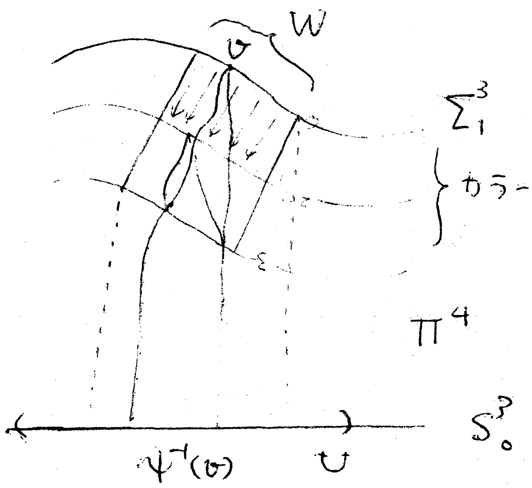
continuous. $S^n \times [0,1]$ の Hausdorff 性から bicontinuous〃

<u>補題2</u> 位相的 Π^4 を部分リプシッツ, δ, ε, O, φ を定義1におけるものとする. このとき, ε の Σ_1^3 における十分小さい近傍 $V \subset \Sigma_1^3$ に対して relation

$$S^3 \ni u \overset{\Psi}{\longmapsto} \lim_{t \uparrow 1} \varphi(u,t) \equiv \Sigma_1^3 \cap Cl_{\Pi^4} \varphi(u,[0,1)) \subset \Sigma_1^3$$

は, V の上で well-defined CE 写像 $\Psi| : \Psi^{-1}(V) \to V$ を定める〃

補題2の証　リプシッツ性の仮定が、十分小さなVに対して、$\lim_{t\uparrow 1}\Psi(u,t)\in V$ の収束性と、$\psi|\psi^{-1}(V)$ の連続性を保証する。各 $v\in V$ に対して $\psi^{-1}(v)\subset S^3_0$ が cell-like であることを示せばいい。近傍 $\psi^{-1}(v)\subset U\subset S^3_0$ に対し右図の様に、Σ^3_1 のカラーに沿って開集合 $W\times(0,\varepsilon)$ を十分小さくとれば、リプシッツ性の仮定から $\Psi(S^3\times[0,1))$ による積構造に関する $\Psi(S^3\times 0)=S^3_0$ への projection (of $W\times(0,\varepsilon)$) は U の中に入る。さらに ε を小さくとっておけば、$\psi|\psi^{-1}(v)$ の写像柱 (in Π^4) は $(\Sigma^3_1\setminus W)\times[0,\varepsilon)$ カラーとは交わらないとしてよい。このとき Σ^3_1 のカラーにおいて、$[0,\varepsilon)$ を $[1/2\,\varepsilon,\varepsilon)$ に縮める変形を考えれば、これによって、$\psi|\psi^{-1}(v)$ の写像柱が $\Pi^4\setminus\Sigma^3_1$ に入る。$\Psi(S^3\times[0,1))$ による積で $\Psi(S^3\times 0)=S^3_0$ に（この写像柱を）おとせば、これは、U における $\psi^{-1}(v)$ の null-homotopy を与える。cell-like 分解写像 $\psi^{-1}(V)\to V$ の upper semi-continuity は V の Hausdorff 性から自動的に従う//



定理1の証

((a) ⇒ (c))：$S^4\supset S^3_0\sqcup S^3_1$ を局所平坦に埋込ま

れた２つのdisjoint 3-球面とする。この２つによって挟まれた部分の閉包を Π^4 とおく。$\Pi^4 \setminus S^3_1 \approx S^3 \times [0,1)$ である。実際、Brown の Schoenflies 定理の証明 [Br] から S^3_1 によって囲まれる S^3_0 と反対側の部分の閉包は cellular 4-球体 $D^4_1 \subset S^4$ であるから、

$$\Pi^4 \setminus S^3_1 \underset{(\text{cellularity of } D^4)}{\approx} (\Pi^4 \cup D^4_1) \setminus pt \underset{(\text{Schoenflies})}{\approx} D^4 \setminus pt$$

従って (a) を仮定すると、補題２から Π^4 の中に、十分小さな閉３球体 $\mathring{D}^3 \subset S^3_1$ の上への CE 写像 $S^3_0 \supset \psi^{-1}(\mathring{D}^3) \xrightarrow{\psi|} \mathring{D}^3 \subset S^3_1$ の写像柱 $M_{\psi|}$ が埋込まれている。ところが [Ar] から $\psi|$ は ABH になるので、補題１の証明と同様にして、この写像柱は $\mathring{D}^3 \times [0,1] \subset \Pi^4$, $\mathring{D}^3 \times 0 \subset S^3_0$, $\mathring{D}^3 \times 1 = \mathring{D}^3 \subset S^3_1$ に他ならない。そこで [Ki1] と同様に、S^4 中の局所平坦３-球面 $(S^3_0 \setminus \frac{1}{2}D^3 \times 0) \cup (\partial \frac{1}{2}D^3 \times [0,1]) \cup (S^3_1 \setminus \frac{1}{2}D^3 \times 1)$ を考えると、Schoenflies 定理から $\Pi^4 \setminus (\frac{1}{2}\mathring{D}^3 \times [0,1])_{\text{写像柱}}$ は 4-球体となり、再び $(\frac{1}{2}D^3 \times [0,1])_{\text{写像柱}}$ を埋めれば、位相同型 $\Pi^4 \approx S^3 \times [0,1]$ をうる //

((c) ⇒ (b)): 全ての位相的 Π^4 with $\Sigma^3_1 \approx S^3$ に対し、$D^4_0 \underset{S^3_0}{\cup} \Pi^4 \underset{\Sigma^3_1}{\cup} D^4_1$ はホモトピー4-球面であり [Fr] からこれは S^4 に位相同型、従って $\Pi^4 \approx S^3 \times [0,1]$ //

((b) ⇒ (a)) は自明 //

定理２の ☺

((a) ⇒ (b)) 補題２の証明から、Σ^3_1 は、S^3_0 の CE 分解空間になるが、[Ar] から、これは shrinkable (ABH) とくに $\Sigma^3_1 \approx S^3_0 \approx S^3$ //

((b) ⇒ (c)) Σ^3 をホモトピー３－球面とする。$\Delta^4 \equiv (\Sigma^3 \setminus \mathrm{Int}\, D^3) \times [0,1]$ とおくと、Δ^4 は可微分コンパクト可縮４－多様体で、$\partial\Delta = \Sigma \# (-\Sigma)$、ここで $\Pi^4 \equiv \Delta^4 \setminus \mathrm{Int}\, D^4$ とおけば、$\Pi^4 \setminus (\Sigma \# (-\Sigma)) \approx S^3 \times [0,1)$

実際 $\Delta^4 \underset{(\Sigma\#-\Sigma)}{\cup} (-\Delta)^4$ を考えると、これはホモトピー４－球面で、[Fr] から $\approx S^4$。この中で $(-\Delta^4)$ はホモトピー３球面 $\Sigma\# -\Sigma$ のカラーを用いれば、cellularity criterion を満たしている cell-like set である。従って [Fr] Theorem 1.11 から cellular. (4:次元 cellularity criterion) よって

$$\underset{(\text{cellularity of } -\Delta^4)}{\Pi^4 \setminus (\Sigma\# -\Sigma) \approx \Pi^4 \cup (-\Delta^4) \setminus pt} \underset{(\text{Schoenflies})}{\approx D^4 \setminus pt}$$

従って (b) から $\Sigma \# (-\Sigma) \approx S^3$、ここで連結和 # の $S^2 \subset S^3$ は bicollared であるから Schoenflies 定理から

$\Sigma \setminus \mathrm{Int}\, D^3 \approx D^3$ $\therefore$ $\Sigma = D^3 \underset{S^2}{\cup} D^3 \approx S^3$ //

((c) ⇒ (b)) Σ^3_1 は常にホモトピー３－球面である。

実際、Σ_1^3 中の loop は まず Σ_1^3 のカラーで Π^4 の内部に入れると、$\Pi^4 \setminus \Sigma_1^3$ の中に null-homotopy をもつ。これは $\Pi^4 \setminus \Sigma^3 \approx S^3 \times [0,1)$ を使えば、Σ_1^3 のカラーの中に入っているとしてよい。これを再びカラーを使って Σ_1^3 へ project すれば、これがもとの loop の Σ_1^3 における null-homotopy となっている。従って (c) を仮定すれば $\Sigma_1^3 \approx S^3$ //

<u>定理3の⑤</u> CE写像 $f: S^4 \to S^4$ が定める cell-like 分解 (of S^4) を D_f とおく ($D_f = \{f^{-1}pt\}$)。$S^5 = \Sigma S^4$ (suspension) と思い、suspension level を $[-2, 2]$ で表わす。S^5 の cell-like 分解 $\Sigma D_f = \{f^{-1}pt \times t \;\; -2<t<2,\ \text{susp. pts}\}$ は [Ca] [Ed] から ~~ABH~~ shrinkable また saturated open set $S^5 \supset S^4 \times [-2, 1)$ への ΣD_f の制限も ~~ABH~~ shrinkable だから

$$\begin{tikzcd} & S^5 \arrow[r, "\mathrm{ABH}", "p_1"'] \arrow[dl, "\mathrm{ABH}"', "p_0"] & S^5/\Sigma D_f \arrow[d, equal] \\ S^5/(\Sigma D_f | S^4 \times [-2,1)) \approx S^5_0 \arrow[rr, "\pi"'] & & S^5_1 \end{tikzcd}$$

ここで π は残りの ΣD_f の元をつぶす写像、π によって S^5_0 中の $S^4 \times [-1, 1]$ は S^5_1 に埋込まれた f の写像柱に写像されている：$\pi(S^4 \times [-1,1]) = M_f \subset S^5_1$。この M_f は S^5_1 中の局所平坦な2つの S^4 によって挟まれている。実際 $\pi(S^4 \times -1) \subset S^5_1$ が局所平坦なことは自明。$\pi(S^4 \times +1) \subset S^5_1$ については、$\pi(S^4 \times +1) = p_1(S^4 \times +1)$ だから S^5 から

が p_1 の像と思うと $S^4 \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) / D_f \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
$= (S^4 / D_f) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = S^4 \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ($\because \mathrm{Im} f = S^4$)
によって、bicolland になる。従って Annulus 定理 [Ki2] から $M_f \approx S^4 \times [0,1]$。従って $M(4)$ を仮定すれば f は ABH //

参照文献

[Ar] S. Armentrout, Cellular decompositions of 3-manifolds that yield 3-manifolds Memoirs A.M.S 107 (1970)

[Br] M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem Bull. A.B.S. 66 (1960) 74-76

[Ca] J. Cannon, Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three. Ann. Math 110 (1979) 83-112

[Ed] R. Edwards, Approximating certain cell-like maps by homeomorphisms (preprint. 1977)

[Fr] M. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, preprint (1982)

[Ki1] R. Kirby On the annulus conjecture PAMS 1965

[Ki2] ______, Stable homeomorphisms and the annulus conjecture. Ann. Math ~~(2) 77~~ 1969

[Si] L. Siebenmann, Approximating cellular maps by homeomorphisms, Topology 11 (1972), 271-294